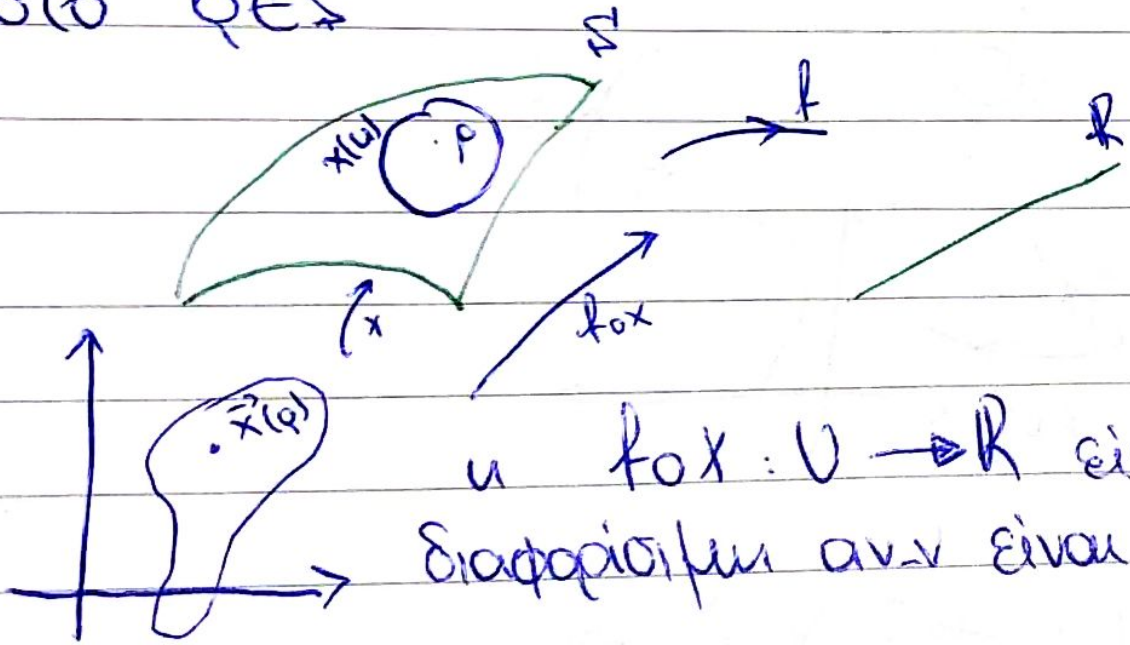
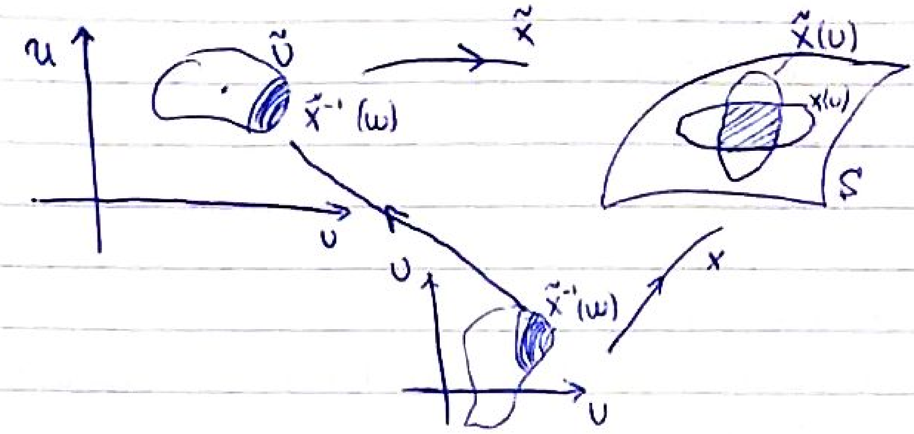
Δευτέρα 18/11/2019

# ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ




**Ορισμός:** Μια συνάρτηση $f: S \to \mathbb{R}$ καλείται διαφορίσιμη στο $p \in S$ αν για σύστημα συντ/μένων $X: U \to S$ με $p \in X(U)$ η $f \circ X : U \to \mathbb{R}$ είναι διαφ. στο $\vec{x}(p)$. Η $f$ καλείται διαφορίσιμη αν-ν είναι διαφ. σε κάθε $p \in S$.

## Πρόταση




Έστω $X: U \to S$ και $\tilde{X}: \tilde{U} \to S$ συστήματα συντεταγμένων ώστε $W = X(U) \cap \tilde{X}(\tilde{U}) \neq \emptyset$

Η $\tilde{X}^{-1} \circ X : X^{-1}(W) \to \tilde{X}(W)$ είναι λεία

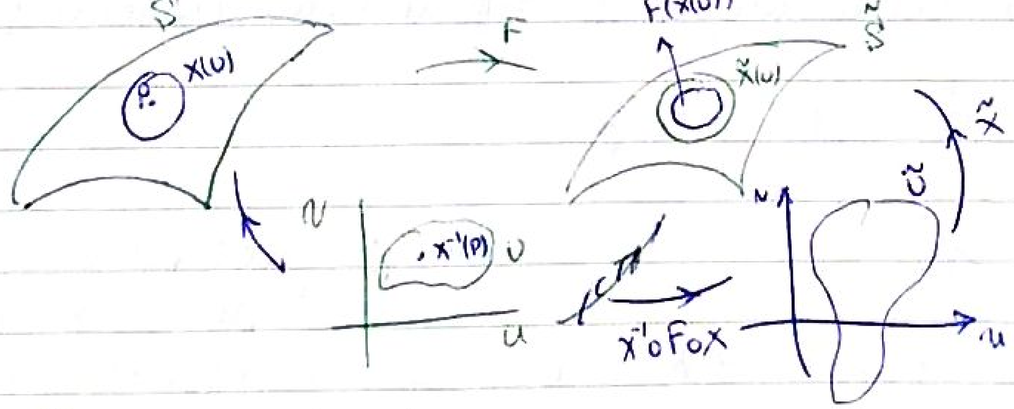
$f \circ X,\ f \circ \tilde{X} = (f \circ X) \circ (X^{-1} \circ \tilde{X})$

Απόδειξη

$(X|_{U_0})^{-1} = (\pi_1 \circ \tilde{X})_{U_0} \circ \pi_1$

ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ
ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

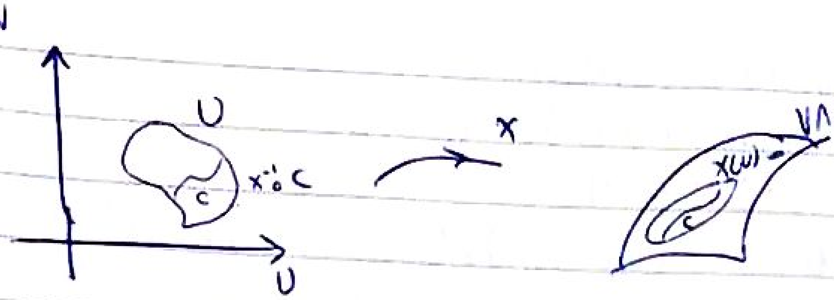
Ορισμός: Μια απεικόνιση $F: S \to \tilde{S}$ καλείται διαφ. στο $p \in S$ αν




i) Η $F$ είναι συνεχής στο $p$, και

ii) για συστήματα συντεταγμένων $X: U \to S$, $\tilde{X}: \tilde{U} \to \tilde{S}$ με $p \in X(U)$, $F(X(U)) \subseteq \tilde{X}(\tilde{U})$ η $\tilde{X}^{-1} \circ F \circ X$ είναι διαφ στο $X^{-1}(p)$.

$\tilde{X}_1^{-1} \circ F \circ X_1 = (\tilde{X}_1^{-1} \circ \tilde{X}) \circ (\tilde{X}^{-1} \circ F \circ X) \circ (X^{-1} \circ X_1)$




$x^{-1} : X(U) \to U$

$X^{-1} \circ \tilde{X}$ διαφ.

$c(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$\beta(t) = (u(t), v(t))$

$c(t) = X \circ \beta(t) \Leftrightarrow c(t) = x(u(t), v(t))$

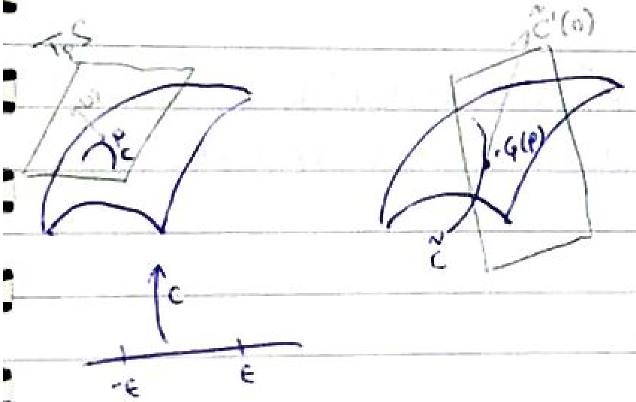
$u(t), v(t)$ λείες

## ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΩΝ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ ΜΕΤΑΞΥ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

<ins>Ορισμός</ins>: Έστω $\phi : S \to \tilde{S}$ διαφ. απεικ. μεταξύ των κανονικών επιφανειών $S, \tilde{S}$. Καλούμε διαφορικό του $\phi$ στο $p \in S$ την απεικόνιση:

$d\phi_p : T_pS \to T_{\phi(p)}\tilde{S}$

η οποία ορίζεται ως εξής:




$\forall w \in T_pS$, $c(-\epsilon, \epsilon) \to S$.

$c(0) = p$, $c'(0) = w$

$\tilde{c} = \phi \circ c$, $\tilde{c}(0) = \phi(c(0)) = \phi(p)$.

$d\phi_p(w) = \tilde{c}'(0)$

Θεωρώ συστήματα συντεταγμένων $X : U \to S$ με $p \in X(U)$, $\tilde{X} : \tilde{U} \to \tilde{S}$ με $\phi(p) \in \tilde{X}(\tilde{U})$ με $\phi(X(U)) \subseteq \tilde{X}(\tilde{U})$

$\beta = X^{-1} \circ c$, $\beta(t) = (u(t), v(t))$

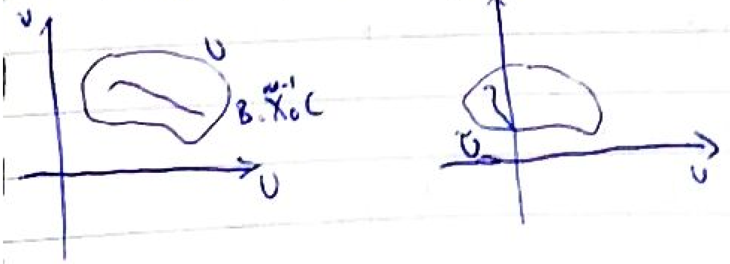
$\tilde{\beta} = \tilde{X}^{-1} \circ \tilde{c}$, $\tilde{\beta}(t) = (\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))$

$\tilde{X}^{-1} \circ \phi \circ X(u,v) = (\phi_1(u,v), \phi_2(u,v)) = (u,v)$

$c(t) = X(u(t), v(t))$, $\tilde{c}(t) = \tilde{X}(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))$

$\tilde{\beta}(t) = \tilde{X}^{-1} \circ \tilde{c}(t) = \tilde{X}^{-1} \circ \phi \circ c(t)$

$= (\tilde{X}^{-1} \circ \phi \circ X) \circ \beta(t)$



$\tilde{\beta}(t) = (\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) = (\varphi_1(u(t), v(t)), \varphi_2(u(t), v(t)))$

$w = c'(0) \Rightarrow w' = u'(0) X_u(u(0), v(0)) + v'(0) X_v(u(0), v(0))$.

$c(t) = X(u(t), v(t))$ , $\tilde{c}(t) = \tilde{X}(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))$

$\tilde{c}'(t) = \tilde{u}'(0) \tilde{X}_{\tilde{u}}(\tilde{u}(0), \tilde{v}(0)) + \tilde{v}'(0) \tilde{X}_{\tilde{v}}(\tilde{u}(0), \tilde{v}(0)) = \left(u'(0) \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(\ldots) + v'(0) \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(\ldots)\right) \times$
$\tilde{X}_{\tilde{u}}(\tilde{u}(0), \tilde{v}(0)) + \left(u'(0) \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(\ldots) + v'(0) \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(\ldots)\right) \tilde{X}_{\tilde{v}}(\ldots)$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Το διαφορικό διαφ. απεικ. είναι καλά ορισμένο και γραμμική απεικόνιση.

~~Διαφορικό~~

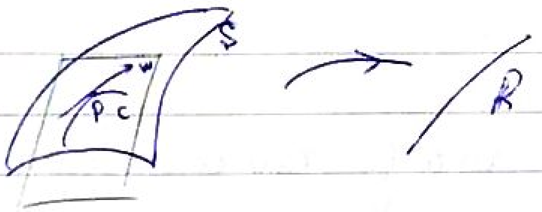
ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΔΙΑΦΟΡ. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ορισμός: Έστω $f: S \to \mathbb{R}$ διαφ. συνάρτηση καλούμε διαφορικό της $f$ στο $p \in S$ την απεικόνιση $df_p: T_pS \to T_{f(p)}\mathbb{R} = \mathbb{R}$

$df_p(w) = (f \circ c)'(0)$

$w \in T_pS$

$c(-\epsilon, \epsilon) \to S$, $c(0) = p$, $c'(0) = w$




Παράδειγμα: Δίνεται διάνυσμα $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $f: S \to \mathbb{R}$ $f(p) = \langle p, \vec{a} \rangle$ $p = (x, y, z)$

$P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$ $df_{P_0}(w) = ?$ $\langle w, \vec{a} \rangle$

$w \in T_{P_0}S$, $c(-\epsilon, \epsilon) \to S$, $c(0) = P_0$, $c'(0) = w$

$df_p(w) = (f \circ c)'(0)$

$f \circ c(t) = f(c(t)) = \langle c(t), \vec{a} \rangle \Rightarrow (f \circ c)'(0) = \langle c'(0), \vec{a} \rangle = \langle w, \vec{a} \rangle$.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $S$ κανονική συνεκτική επιφάνεια και $f: S \to \mathbb{R}$ διαφ. συνάρτηση. Αν $df_p = 0$ $\forall p \in S$ τότε $f$ είναι σταθερή.

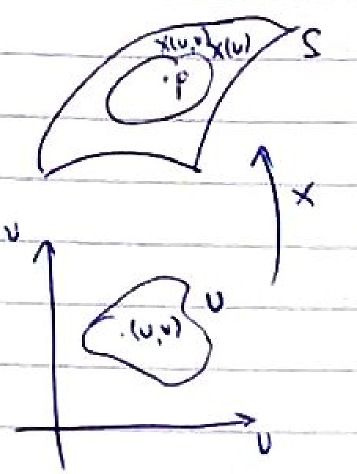
Απόδειξη:

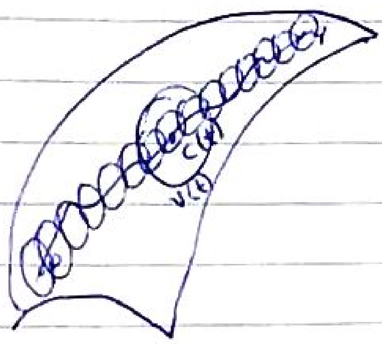
Θεωρώ $p \in S$ και $X: U \to S$ σύστημα συντεταγμένων με $p \in X(U)$

Υποθέτω ότι $U$ είναι συνεκτικό

$df_{X(u,v)}(X_u(u,v)) = 0 = df_{X(u,v)}(X_v(u,v))$

$(f \circ X)_u(u,v) = 0 = (f \circ X)_v(u,v) \Rightarrow f|_{X(U)} = \text{σταθ.}$




$c:[0,1]\to S$ $\quad c(0)=p,\quad c(1)=q$

$\forall t\in[0,1]$ $\exists$ ανοικτή $V(t)$ στο $S$ περιοχή του $c(t)$, ώστε $f|_{V(t)}=$ σταθ

$c([0,1])\subseteq \bigcup_{0\le t\le 1} V(t)$

---

$\varphi: S \to \mathbb{R}^3$ $\quad \varphi=(f,g,h)$, $\; f,g,h: S\to\mathbb{R}$

$d\varphi_p: T_pS \to T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^3$, $\; d\varphi_p(w)=(df_p(w), dg_p(w), dh_p(w))$

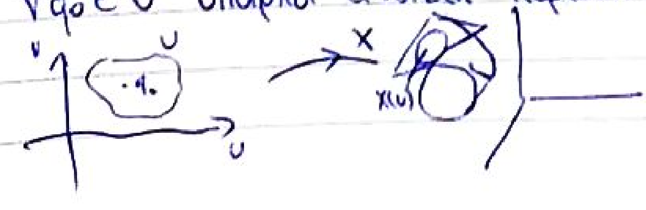
Πόρισμα: $S$ συνεκτική κ' ανοικτή επιφάνεια και $\varphi: S\to\mathbb{R}^3$ διαφ. απεικ. Αν $d\varphi_p=0$ $\forall p\in S$ τότε η $\varphi$ είναι σταθερή.

## ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ

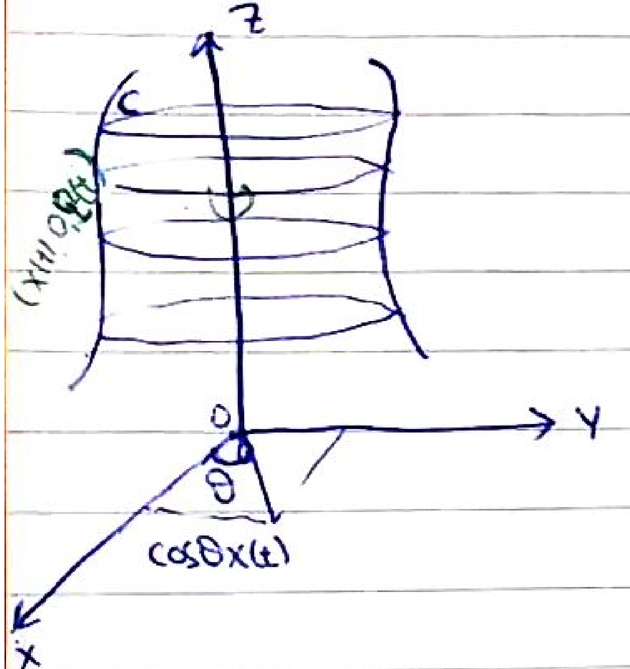
Ορισμός: Καλούμε κανονική παραμετρική επιφάνεια κάθε λεία απεικόνιση $X: U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε $X_u\times X_v(u,v)\neq 0$, $\forall (u,v)\in U$

$X,\tilde X$ γεωμ. ισοδύναμες $\Rightarrow$ $\tilde X = T\circ X$, $\; T\in Isom(\mathbb{R}^3)$

Πρόταση: Έστω $X:U\to\mathbb{R}^3$ κανονική παραμετρική επιφάνεια. Τότε $\forall q_0\in U$ υπάρχει ανοικτή περιοχή $U_0\subset U$ του $q_0$ ώστε $X(U_0)$ είναι κανονική επιφάνεια.



## Παράδειγμα




Θεωρώ καμπύλη $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$c(t) = (x(t), 0, z(t))$.

$X : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$X(t,\theta) = (\cos\theta\, x(t), \sin\theta\, x(t), z(t))$

$X$ λείο.

$X_t(t,\theta) = (x'(t)\cos\theta, x'(t)\sin\theta, z'(t))$.

$X_\theta(t,\theta) = (-x(t)\sin\theta, x(t)\cos\theta, 0)$

$$X_t \times X_\theta (t,\theta) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x'(t)\cos\theta & x'(t)\sin\theta & z'(t) \\ -x(t)\sin\theta & x(t)\cos\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-x(t)z'(t)\cos\theta, -x(t)z'(t)\sin\theta, x(t)x'(t))$$

$$= x(t)\,(-z'(t)\cos\theta, -z'(t)\sin\theta, x'(t))$$

$$\|X_t \times X_\theta\| = |x(t)|\sqrt{(z'(t))^2 + (x'(t))^2} = |x(t)|\,\|c'(t)\|$$